

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה



## תוכן העניינים

|     |                                                     |    |
|-----|-----------------------------------------------------|----|
| 1.  | חזרה על מדר - משוואות מסדר ראשון                    | 1  |
| 23. | חזרה על מדר - משוואות ליניאריות מסדר שני            | 23 |
|     | מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני (ללא ספר) | 3  |
| 38. | בעיות שטורם ליוביל                                  | 4  |
| 43. | טורי פורייה                                         | 5  |
|     | משוואת החום (ללא ספר)                               | 6  |
| 45. | התמרת לפלס                                          | 7  |
|     | משוואת לפלס (ללא ספר)                               | 8  |

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 1 - חזרה על מדר - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| 1. מבוא                                        | (ללא ספר) |
| 2. הפרדת משתנים                                | 1         |
| 3. משוואה הומוגנית                             | 3         |
| 4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$   | 5         |
| 5. משוואה מדויקת                               | 6         |
| 6. גורם אינטגרציה                              | 8         |
| 7. משוואה לינארית מסדר ראשון                   | 11        |
| 8. משוואת ברנולי                               | 13        |
| 9. משוואת ריקטי                                | 14        |
| 10. הצבות שונות ומשונות                        | 15        |
| 11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד    | 16        |
| 12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון | 19        |
| 13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה            | 21        |

## הפרדת משתנים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x| - c}, \quad y = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t + c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

## משוואה הומוגנית

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xy y' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9) \quad \text{נתונה המשוואה}$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $n$ , על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של  $n$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (5)$$

$$\ln(1 + e^{(x/y)^2}) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(1 + 2(y/x)^2) + c \quad (9)$$

## משוואה מהצורה $(ax + by + c)dx + (dx + ey + f)dy = 0$

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} - 1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1} + 1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

## משוואה מדויקת

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

$$(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0 \quad (7)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע  $k$ , על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של  $k$  שנמצא בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

## גורם אינטגרציה

### שאלות

(1) הראו שהמשוואה  $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $\frac{1}{xy^3}$ .

(2) הראו שהמשוואה  $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $ye^x$ .

(3) הראו שהמשוואה  $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$  אינה מדויקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה  $xe^x$ .

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

(10) נתונה מד"ר לא מדויקת  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

א. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ , אז  $e^{\int f(x)dx}$  הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם  $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ , אז  $e^{-\int g(y)dy}$  הוא גורם אינטגרציה.

(11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד. כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה  $\mu(xy)$ .

(12) נתונה המשוואה  $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה  $\mu(x + y)$ .

(13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $\frac{x}{y}$  בלבד.

(14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $(x^2y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$ .

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של  $x^\alpha y^\beta$ . כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה  $\mu(x^\alpha y^\beta)$ .

(15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $xy$  בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה  $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$ .

(16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ .

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של  $x + y$  בלבד.

## תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (10)$$

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{ב.} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x+y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

## משוואות ליניאריות מסדר ראשון

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2 z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

## תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[ \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) \left[ x^2 - 4x + C \right] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} \left[ -5e^{\cos x} + C \right] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x \left[ -\cot x + C \right] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2 (y + c) \quad (9)$$

## משוואות ברנולי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left( \frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left( \frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

## משוואות ריקטי

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

## הצבות שונות ומשוונות

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = \cos(y - x) \quad (1)$$

$$y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right); y(1) = 0 \quad (2)$$

$$y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4}, y(0) = 1 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{1}{\sin z} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \quad (2)$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

## משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

### שאלות

(1) נתונה הבעיה  $y(2) = -1$ ,  $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$ .

א. הוכיחו ש-  $y_1(x) = -x + 1$ ,  $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$  הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

(2) נתונה הבעיה  $y(0) = 0$ ,  $y' = \sqrt[3]{y} + 4$ .

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

(3) פתרו את הבעיה  $y(4) = 0$ ,  $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$ .

(4) נתונה הבעיה  $y(0) = 4$ ,  $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$ .

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

(5) נתונה המד"ר  $ydx = (2x + y^3)dy$ .

א. הראו שעבור  $x = x(y)$  המד"ר ליניארית מסדר ראשון,

ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,

מהן נקודות ההתחלה  $(x_0, y_0)$ , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,

העובר דרך  $(x_0, y_0)$ .

צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.

מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך  $(x_0, y_0)$ ?

$$(6) \quad \begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.  
 ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר  $n$  (הוכיחו באינדוקציה).  
 ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר  $n$  מתכנס לפתרון כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

$$(7) \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases} \quad \text{כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה} \quad (x > 0) ?$$

$$(8) \quad \begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(9) \quad \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{נתונה בעיית ההתחלה}$$

- א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.  
 ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.  
 ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

$$(10) \quad \begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

$$(12) \quad \begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{הראו כי לבעיה יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.
- (3)  $y(x) = 0$
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.  
ב. כל נקודת התחלה  $(x_0, y_0)$ , שעבורה  $y_0 \neq 0$ .  
הקטע הארוך ביותר:  $(0, \infty)$  או  $(-\infty, 0)$ .
- (6) א.  $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$   
ב.  $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ . ג. הוכחה.
- (7) אחד.
- (8) א.  $[-0.08, 0.08]$  ב.  $[-0.1, 0.1]$  ג. הוכחה.
- (9) א.  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$  ב.  $[-0.5, 0.5]$  ג. הוכחה.
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.

## פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

### שאלות

(1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית  $y' = 2y - x$ .

(2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א.  $y' = \frac{x}{y}$

ב.  $y' = xy$

ג.  $y' = x + y$



(3) נתונה המד"ר  $y' = y - x$ ,  $y(0) = 2$ .

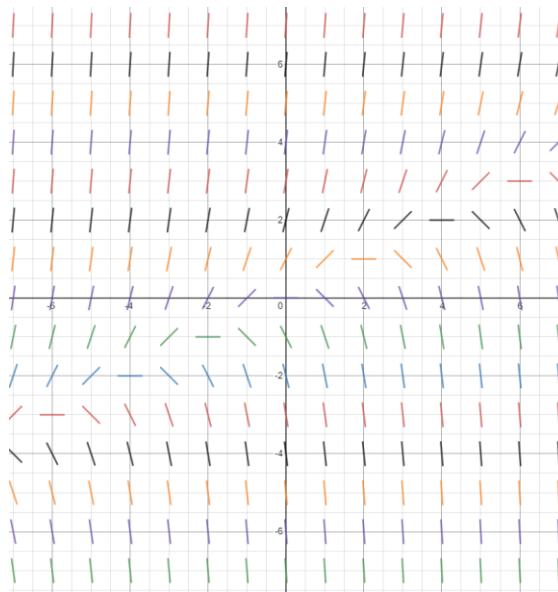
מצאו בקירוב את  $y(1)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.1$ .

(4) נתונה המד"ר  $y' = x + y$ ,  $y(1) = 2$ .

מצאו בקירוב את  $y(2)$  בעזרת שיטת אוילר עם  $h = 0.2$ .

## תשובות סופיות

(1)



(2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

(3)  $y(1) = 4.593$

(4)  $y(2) = 6.95328$

## משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן  $p = y' = \frac{dy}{dx}$ .

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

## תשובות סופיות

$$(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left( \ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left( y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left( \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0 \quad (6)$$

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 2 - חזרה על מדר - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה ..... 23
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים ..... 25
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" ..... 27
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" ..... 29
5. וריאציית פרמטרים ..... 31
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר) 32
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל ..... 32
8. הוורונסקיאן ושימושו ..... 33
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני ..... 35
10. השיטה האופרטורית ..... 36

## משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

### תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[ \frac{c^2 (x + k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = -(cx + k); y = c \quad (8)$$

## משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

### שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 1, \quad 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3; \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2} y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$(12) \quad y y'' + (y')^2 = 0 \quad \text{נתונה המד"ר}$$

א. הראו כי  $y_1 = 4$  ו-  $y_2 = \sqrt{x}$  הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון  $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ , אינו פתרון של המד"ר.

האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

### תשובות סופיות

$$(1) \quad y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x}$$

$$(2) \quad y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$$

$$(4) \quad z = e^x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(6) \quad x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}}$$

$$(7) \quad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$(8) \quad y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x]$$

$$(9) \quad y = e^2 \sin 3x$$

$$(10) \quad y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[ c_1 \cos \left( \frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left( \frac{2}{5} x \right) \right]$$

$$(11) \quad y = 4e^{-\frac{|x|}{a}}$$

(12) שאלת הוכחה.

## השוואות מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4\sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## השוואות מקדמים בשיטת "המרשם"

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

## וריאציית פרמטרים

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[ \ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[ \frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[ 2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

## משוואה ליניארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

### שאלות

(1) פתרו  $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$ , כאשר ידוע  $y_1(x) = e^{2x}$ .

(2) פתרו  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ .

(3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר ליניארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}, \quad (0 < x < 1),$$

כאשר ידוע ש-  $y_1(x) = e^x$ , פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

### תשובות סופיות

(1)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

(2)  $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

(3) שאלת הדגמה.

## הוורונסקיאן ושימושו

### שאלות

- (1) האם ייתכן כי  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \sin x$  הם שני פתרונות של המשוואה  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  עם מקדמים רציפים בקטע  $[0, \pi]$ ?
- (2) הראו כי הפונקציות  $y_1(x) = \sin x^2$ ,  $y_2(x) = \cos x^2$  הן פתרונות בת"ל של המשוואה  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  בקטע  $(-4, \infty)$ .  
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור  $x = 0$ .  
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?
- (3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות  $y_1(x) = xe^x$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$  הן פתרונות של המשוואה  $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$  בקטע  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .  
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?
- (4) נתונות שתי פונקציות  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  בקטע  $[-4, 4]$ .  
א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.  
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.  
ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?  
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר  $xy'' - 2y' = 0$ .  
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. יהיו  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  פונקציות גזירות פעמיים בקטע  $I$ , ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- $I$ .  
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  הם פתרונות שלה.  
ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע  $x > 0$ , שהפונקציות  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x^4$  הן פתרונות שלה.

- (6) נתון כי  $y_1(x), y_2(x)$  הם פתרונות של המד"ר  $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ , כאשר  $p, q$  רציפות בקטע  $I$ .  
הראו כי אם קיימת נקודה  $c$  בקטע  $I$ , שעבורה  $y_1(c) = y_2(c) = 0$ , אז  $\{y_1(x), y_2(x)\}$  אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

### תשובות סופיות

- (1) לא.  
(2)  $W = -2x$   
(3) כן.  
(4) א.  $W = 0$       ב. שאלת בדיקה.      ג. לא.      ד. לא.  
(5) א. שאלת הוכחה.      ב.  $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$   
(6) שאלת הוכחה.

## משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $y'' - 4y = 12x$ .

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

ג. נסו למצוא פתרון המקיים:

$$\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים  $y(0) = 1$ .

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

(2) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי  $y_1(x) = 0$  ו-  $y_2(x) = x^2$ , הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

(3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה  $x = 0$ , כך שהפונקציות  $y = 4x$  ו-  $y = \sin 4x$  הן פתרונותיה?

### תשובות סופיות

(1) א.  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 3x$  ב.  $y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} - 3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

(3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

## השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא:  $ay'' + by' + cy = Q(x) \Leftrightarrow (aD^2 + bD + c)y = Q(x)$ .

### שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (1)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (2)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (3)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (4)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (5)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (6)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x \quad (7)$$

## תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1 \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (3)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (5)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x \quad (7)$$

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 3 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 4 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל ..... 38

## בעיות שטורם-ליוביל

### שאלות

(1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית

$$\cdot (p(x)y'(x))' + (\lambda r(x) - q(x))y(x) = 0$$

(משוואת הרמיט)  $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$  א.

(משוואת בסל)  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda)y = 0$  ב.

(2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y'' + e^{2x}y' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + 4y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות 4-7:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y(0) - y'(0) = 0 \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y'(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) + y'(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(8) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

- א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
ב. פתרו את הבעיה.

(9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \ell \\ y(0) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$ב. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 1 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

1. פתחו את הפונקציה  $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

התחל את הטור מ- $n=1$ .

2. מה סכום הטור ב- $x=0$ ?

האם הוא שווה לערך הפונקציה ב- $x=0$ ?

$$ג. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{נציב } \ell = 2 \text{ בבעיה מסעיף א', ונקבל:}$$

פתחו את הפונקציה  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2$

לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

(10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

$$א. \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ב. פתחו את הפונקציה  $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq \pi$

לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.

התחילו את הטור מ- $n=1$ .

$$(11) \text{ נתונה הבעיה: } \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, & 0 < x < e \\ y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.  
 ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.  
 ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את  $f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e} \leq x \leq e \end{cases}$  , לטור פונקציות עצמיות.

- הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור  $x=1$  שונים.  
 ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור  $x = \sqrt{e}$ ,  $x = 1.5$ ,  $x = 2$ .

**זהויות שכדאי להכיר:**

$$\begin{aligned} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\pi n) = 0 \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (e^{-x^2} y')' + (\lambda e^{-x^2} - 0)y = 0 \quad \text{ב. } (xy')' + \left( \lambda \left( -\frac{1}{x} \right) - (-x) \right) y = 0$$

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(5) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \phi_n(x) = n \cos nx + \sin nx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \text{ בנוסף, } \lambda = -1 \text{ הוא עי"ע של הבעיה,}$$

$$\text{המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = e^x.$$

$$(6) \quad \text{פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(7) \quad \text{פונקציות עצמיות: } y_n(x) = \sin(\omega_n x) - \omega_n \cos(\omega_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{בנוסף, } \lambda_0 = 0 \text{ הוא עי"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית } \varphi(x) = x - 1.$$

$$(8) \quad \text{א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = e^x \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = (n\pi)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(9) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. סכום הטור ב- } x=0 \text{ הוא } 0, \text{ והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב- } x=0.$$

$$\text{ג. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right) \quad (0 < x < 2).$$

$$(10) \quad \text{א. פונקציות עצמיות: } \varphi_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ערכים עצמיים: } \lambda_n = (\omega_n)^2 = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ב. } e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)} (-1)^{n+1} - 1}{1^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \quad \text{כאשר } 0 < x < \pi.$$

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \ln x\right)$$

ערכים עצמיים :  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

ג. שאלת הוכחה.

ד. 
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \ln x\right)$$

ה. סכום הטור ב-  $x = \sqrt{e}$  הוא  $\frac{1}{2}$  ; ב-  $x = 1.5$  הוא 1 ; וב-  $x = 2$  הוא 0.

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 5 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי ..... 43
3. המשכה זוגית ואי זוגית ..... 44

## טור פורייה ממשי:

### שאלות:

- (1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .
- (2) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ .
- (3) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \sin(|x|)$ .
- (4) מצאו טור פורייה של  $f(x)$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  כאשר  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

### תשובות סופיות:

- (1) 
$$\sum_{n=1}^{20} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$
- (2) 
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$
- (3) 
$$\sin(|x|) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-(2k)^2} \cos(2kx)$$
- (4) 
$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} \cos(nx)$$

## המשכה זוגית ואי זוגית:

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור קוסינוסים:  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$  והוכיחו כי לכל  $0 < x < \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos([2k-1]x) \text{ מתקיים}$$

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = 1$  בקטע  $[0, \pi]$ .

מצאו לה טור סינוסים:  $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  והוכיחו כי:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x) \text{ מתקיים } 0 < x < \pi \text{ א. לכל}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\frac{\pi}{4}$$

### תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

פרק 6 - משוואת החום

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים בקטע סופי ..... (ללא ספר)
2. נוסחת פוואסון בקטע אינסופי ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

## פרק 7 - התמרת לפלס

### תוכן העניינים

|    |                               |
|----|-------------------------------|
| 45 | 1. התמרת לפלס                 |
| 48 | 2. התמרת לפלס ההפוכה          |
| 52 | 3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס |
| 54 | 4. נוסחאות - התמרת לפלס       |

## התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

### שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התמרות לפלס :

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1) \quad L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3) \quad L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5) \quad L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7) \quad L(\sin^2 t) \quad (8)$$

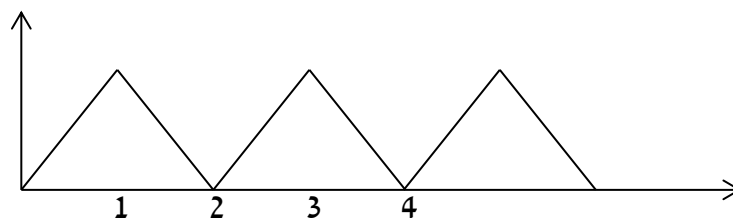
$$L(\cos^2 4t) \quad (9) \quad L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11) \quad L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

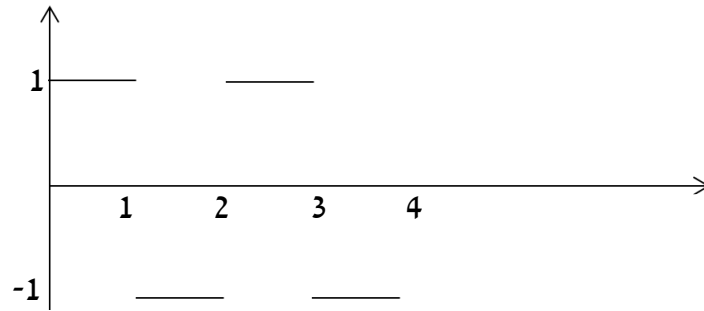
$$(13) \text{ מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה } g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$(14) \text{ מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה } g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$$

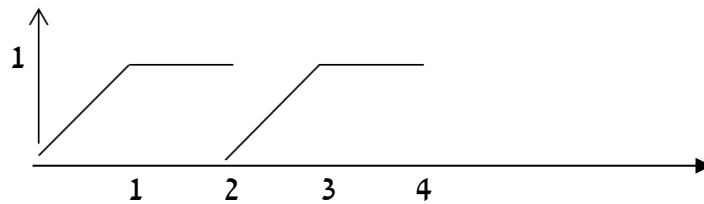
(15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



(16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



(17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



(18) הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה  $u(t)$  ואת ההזזה שלה  $u(t-k)$ .

(19) שרטטו את הפונקציה  $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ , כאשר  $u(t)$  פונקציית המדרגה.

(20) רשמו את הפונקציה  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ , בעזרת פונקציית המדרגה.

(21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה  $u(t)$ , של הפונקציה  $u(t-k)$ , ושל הפונקציה  $f(t-k)u(t-k)$ .

(22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

(23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

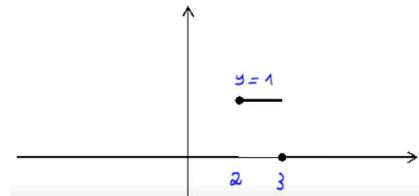
(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא  $\delta(t)$ .

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה  $\delta(t-a)$ ?

## תשובות סופיות

- $$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$
- $$\frac{1}{2} \frac{4}{s^2 + 16} \quad (6)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (8)$$
- $$\frac{8(3s^2 - 16)}{(s^2 + 16)^3} \quad (10)$$
- $$\frac{4}{(s-2)^2 + 16} \quad (12)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \quad (16)$$
- $$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$
- $$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$
- $$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 64} \quad (9)$$
- $$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (15)$$
- $$\frac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (17)$$
- $$(19)$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathcal{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16\frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

## התמרת לפלס ההפוכה

### שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות 1-29 :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

\* בשאלה 27 כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ , כאשר  $f(t) = L^{-1}(F(s))$ .  
פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה:  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ ,  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

(31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

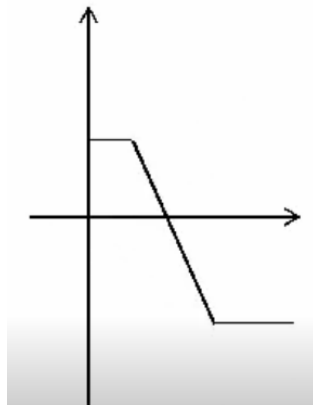
$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

## תשובות סופיות

- (1)  $1$
- (2)  $\frac{t^3}{3!}$
- (3)  $e^{10t}$
- (4)  $\frac{1}{3} \sin 2t$
- (5)  $\cos 2t$
- (6)  $e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$
- (7)  $e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$
- (8)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (9)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (10)  $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$
- (11)  $\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$
- (12)  $1 - 2e^{-5t}$
- (13)  $3e^{-3t} - 2e^{-2t}$
- (14)  $1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$
- (15)  $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$
- (16)  $e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$
- (17)  $e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$
- (18)  $-6 + 5t + 6e^{-2t}$
- (19)  $4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$
- (20)  $2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$
- (21)  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t$
- (22)  $\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t$
- (23)  $\sin t + 2e^{3t}$
- (24)  $\cos t + e^{-2t}$
- (25)  $\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$
- (26)  $e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$
- (27) א.  $3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3)$

ב.  $\begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases}$  ; שרטוט:



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

$$(31) \text{ שאלת הסבר.}$$

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

## פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$\text{כאשר } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10 \cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t - 2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t - 2\pi) - \delta(t - \pi) \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2)\frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

## נוסחאות – התמרת לפלס

| $G(s)$                      | $g(t)$                                               |
|-----------------------------|------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{s}$               | 1                                                    |
| $\frac{1}{s^2}$             | $t$                                                  |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$        | $t^n$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ )                    |
| $\frac{1}{s^n}$             | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ ) |
| $\frac{1}{s-a}$             | $e^{at}$                                             |
| $\frac{1}{(s-a)^n}$         | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$                      |
| $\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$    | $t^{n-1} e^{at}$                                     |
| $\frac{s}{s^2 + a^2}$       | $\cos(at)$                                           |
| $\frac{a}{s^2 + a^2}$       | $\sin(at)$                                           |
| $\frac{s}{s^2 - a^2}$       | $\cosh(at)$                                          |
| $\frac{a}{s^2 - a^2}$       | $\sinh(at)$                                          |
| $\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$   | $\frac{t}{2a} \sin(at)$                              |
| $\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$              |
| $\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$ | $e^{-bt} \sin at$                                    |

|                                         |                                          |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| $\frac{s+b}{[(s+b)^2+a^2]}$             | $e^{-bt} \cos at$                        |
| $\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$               | $t \sin at$                              |
| $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$           | $t \cos at$                              |
| $\frac{1}{(s-a)^2}$                     | $te^{at}$                                |
| $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$                 | $\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$ |
| $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$ | $\sqrt{t}$                               |
| $\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$            | $\frac{1}{\sqrt{t}}$                     |
| $\frac{1}{s}$                           | $u(t)$                                   |
| $\frac{e^{-ks}}{s}$                     | $u(t-k)$                                 |
| $e^{-ks} \cdot F(s)$                    | $u(t-k) f(t-k)$                          |
| $(-1)^n (F(s))^{(n)}$                   | $t^n g(t)$                               |

## תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה  $F(s)$ , של פונקציה  $f(t)$ , ורוצים את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ .

אז במקום למצוא את  $f(t)$  ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx \quad - \text{קונבולוציה:}$$

$$\boxed{L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)}$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t) \qquad L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

# מתמטיקה מתקדמת להנדסה

## פרק 8 - משוואת לפלס

### תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס בגזרה מעגלית ..... (ללא ספר)
5. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)